Hoff Berner

DE DIAMETRIS CURVISQUE CONJUGATIS CURVARUM ALGEBRAICARUM.

DISSERTATIO INAUGURALIS
QUAM
CONSENSU ET AUCTORITATE
AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS
IN
ALMA LITTERARUM UNIVERSITATE
FRIDERICA GUILELMA
PRO
SUMMIS IN PHILOSOPHIA HONORIBUS
RITE CAPESSENDIS
DIE XVII. M. JULII A. MDCCCLX.
H. XII.
PUBLICE DEFENDET
AUCTOR

HERMANNUS WALDAESTEL
NEOBRANDENBURGENSIS.

ADVERSARIORUM PARTES AGENT:

R. HERZBERG, DR. PHIL.
F. GEHRING, CAND. PHIL.
A. DONY, CAND. PHIL.

BEROLINI
TYPIS EXPRESSIT GUSTAVUS SCHADE.

PATRI

O P T I M O   D I L E C T I S S I M O

FRANCISCO WALDAESTEL

PROFESSORI GYMNASII NEOBRANDENBURGENSIS

JUBILAEI PROPTER JUVENTUTEM PER VIGINTI QUINQUE ANNOS LITERIS

INSTRUCTAM MODO ACTI OPPORTUNITATE USUS

HASCE

STUDIORUM PRIMITIAS

PIO GRATOQUE ANIMO

OFFERT

FILIUS.

CAPUT I.

DE DIAMETRIS CONJUGATIS.

§ 1. Data sit plana curva algebraica ordinis cujuslibet n aequatione:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \varphi^{(k)}_{(x,y)} = 0, \tag{1}$$

in qua significatione $\varphi^{(k)}_{(x,y)}$ functio quaedam gradus k inter variabiles x et y homogenea repraesentetur. Ipso in curvae plano porro datum sit punctum coordinatis ξ, η rectaque quaelibet hoc per punctum posita aequatione:

$$y - \eta = m\ (x - \xi). \tag{2}$$

Eliminata inter (1) et (2) ordinata y sequitur:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \varphi^{(k)}_{(x,\, mx + \eta - m\xi)} = 0,$$

quae aequatio abscissas exhibet eorum n punctorum, in quibus recta (2) curvam (1) intersecat. Quum $\varphi^{(k)}$ functio sit homogenea, haec aequatio ita quoque scribi potest:

$$\sum_{k=0}^{k=n} x^k \cdot \varphi^{(k)}_{\left(1,\, m + \frac{\eta - m\xi}{x}\right)} = 0$$

vel adhibito theoremate Taylori:

$$\sum_{k=0}^{k=n} x^k \left(\varphi^{(k)}_{(1,m)} + \left[\frac{\eta - m\xi}{x}\right] \frac{d\varphi^{(k)}}{dy_{(1,m)}} + \dots \right) = 0,$$

ubi significationibus $\varphi^{(k)}_{(1,m)}, \dfrac{d\varphi^{(k)}}{dy\,{(1,m)}}$ etc. in animo est annotare, in functione $\varphi^{(k)}_{(x,y)}$ ejusque rationibus differentialibus ad y partialiter derivatis ubique ponendum esse:

$$x = 1 \text{ et } y = m.$$

Aequatio ad decrescentes dignitates abscissae x disposita transit in hanc:

$$x^n \cdot \varphi^{(n)}_{(1,m)} + x^{n-1}\left([\eta - m\xi] \frac{d\varphi^{(n)}}{dy_{(1,m)}} + \varphi^{(n-1)}_{(1,m)} \right) + \dots = 0.$$

Abscissae punctorum intersectionis partim aut (si data curva paris ordinis est) etiam omnes imaginariae esse possunt; quae si significentur α_1, α_2, ... α_n, efficitur secundum notum algebrae theorema:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k = - \frac{(\eta - m\xi)\dfrac{d\varphi^{(n)}}{dy}_{(1,m)} + \varphi^{(n-1)}_{(1,m)}}{\varphi^{(n)}_{(1,m)}},$$

quae summa semper realis est, si recta intersecans realis et si, ut proponitur, curvae aequatio realibus coefficientibus datur. Ergo, quod punctum inter n puncta intersectionis medium est arithmeticum, ipsum quoque abscissa gaudet semper reali, scilicet hac:

$$x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k = - \frac{(\eta - m\xi)\dfrac{d\varphi^{(n)}}{dy}_{(1,m)} + \varphi^{(n-1)}_{(1,m)}}{n\varphi^{(n)}_{(1,m)}}. \qquad (3)$$

Ordinatam y puncti medii arithmetici, quippe quod in recta (2) positum esse oporteat, accipiemus, si hunc valorem abscissae x in aequationem (2) substituerimus, unde efficitur:

$$y = \frac{(\eta - m\xi)\left(n\varphi^{(n)}_{(1,m)} - m\dfrac{d\varphi^{(n)}}{dy}_{(1,m)}\right) - m\,\varphi^{(n-1)}_{(1,m)}}{n\varphi^{(n)}_{(1,m)}}.$$

Quum vero $\varphi^{(n)}_{(x,y)}$ sit functio gradus n inter variabiles x et y homogenea, ex theoremate Euleriano de functionibus homogeneis sequitur:

$$n\varphi^{(n)}_{(x,y)} \equiv x\frac{d\varphi^{(n)}}{dx} + y\frac{d\varphi^{(n)}}{dy} \;{}^{*)}$$

et, si differentiatione facta ponatur: $x = 1$ et $y = m$:

$$n\varphi^{(n)}_{(1,m)} \equiv \frac{d\varphi^{(n)}}{dx}_{(1,m)} + m\frac{d\varphi^{(n)}}{dy}_{(1,m)}, \qquad (4)$$

qua aequatione adhibita terminus ordinatae puncti medii ita scribi potest:

$$y = \frac{(\eta - m\xi)\dfrac{d\varphi^{(n)}}{dx}_{(1,m)} - m\,\varphi^{(n-1)}_{(1,m)}}{n\varphi^{(n)}_{(1,m)}}. \qquad (5)$$

---

*) Signo $\equiv$ hoc loco saepiusque infra aequationem indicabo identicam.

Conjunctis inter se aequationibus (3) et (5) multiplicatione illius cum $\frac{d\varphi^{(n)}}{dx}_{(1,m)}$, hujus cum $\frac{d\varphi^{(n)}}{dy}_{(1,m)}$ ac deinde ambarum additione sequitur respecta aequatione (4), qua adhibita denominator $n\varphi^{(n)}_{(1,m)}$ tollitur:

$$x\,\frac{d\varphi^{(n)}}{dx}_{(1,m)} + y\,\frac{d\varphi^{(n)}}{dy}_{(1,m)} + \varphi^{(n-1)}_{(1,m)} = 0.$$

Haec aequatio, quippe quam coordinatae ξ, η dati puncti non jam ingrediantur, si in ea quantitatem m constantem, coordinatas autem x et y variabiles esse statuamus, repraesentat eum locum geometricum, quem punctum illud medium describit, si recta curvam intersecans ita loco movetur, ut sibi ipsa semper parallela maneat; hunc igitur locum illa aequatio docet esse lineam directam, quam ex analogia quadam sectionum conicarum vocabo: datae curvae *diametrum* directioni m *conjugatam*.

Sin autem coordinatis x et y supponamus valores constantes et directionem m quantitatem illa ex aequatione definiendam ponamus, quum aequatio respectu m sit gradus $n-1$, accipiemus $n-1$ valores eas directiones indicantes, quibus conjugatae diametri per punctum constans transeant. Unicuique $n-1$ valorum quantitatis m una diameter conjugata est, unde sequitur:

Per datum quodlibet punctum $n-1$ diversae diametri datae curvae ordinis n duci possunt, quarum cuique una directio rectarum inter se parallelarum respondet. Fieri autem potest, ut nonnullae aut (si data curva imparis ordinis est) etiam omnes imaginariae sint.

§ 2. Quum coefficientes nonnisi dimensionum n et $n-1$ ex aequatione datae curvae ordinis n diametri aequationem ingrediantur, omnes curvae, quibus eaedem sunt asymptotae, eidem directioni conjugatam eandem habent diametrum. Simili ratione ex terminis (3) et (5) coordinatarum puncti medii arithmetici deduci potest hoc theorema:

Si data quaelibet curva algebraica recta quavis intersecetur, punctum inter intersectiones medium idem est, quod inter intersectiones ejusdem rectae cum datae curvae asymptotis (cf. § 17).

Ipsae symptotae spectandae sunt tamquam diametri eaeque directionibus talium rectarum inter se parallelarum conjugatae, quarum cujusque cum data curva punctorum intersectionis unum in spatium infinitum progrediatur; et unaquaeque asymptotarum ei, cui conjugata est, directioni ipsa est parallela.

Quod ut demonstretur, primum asymptotae curvae aequatione (1) datae quaerantur. Quae si curva intersecetur recta, cujus aequatio sit:

$$y = mx + \mu, \tag{6}$$

abscissae punctorum intersectionis accipiuntur hac ex aequatione:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \overset{(k)}{\varphi}_{(x,\, mx+\mu)} = 0,$$

quae secundum theorema Taylori explicata et ad decrescentes abscissae x dignitates disposita transit in hanc:

$$x^n . \overset{(n)}{\varphi}_{(1,m)} + x^{n-1}\left(\mu \frac{d\overset{(n)}{\varphi}}{dy}_{(1,m)} + \overset{(n-1)}{\varphi}_{(1,m)}\right) + \ldots\ldots = 0.$$

Jam vero directione m ita definita, ut fiat:

$$\overset{(n)}{\varphi}_{(1,m)} = 0, \tag{7}$$

quae aequatio n valores exhibet, unum eorum n punctorum, in quibus recta (6) datam curvam intersecat, in infinitum progreditur. Porro quantitate quoque μ ita definita, ut sit:

$$\mu \frac{d\overset{(n)}{\varphi}}{dy}_{(1,m)} + \overset{(n-1)}{\varphi}_{(1,m)} = 0, \tag{8}$$

duo n punctorum intersectionis in infinitum excurrunt. Generaliter aequatio (8) unum finitumque quantitatis μ valorem exhibet unicuique n valorum directionis m ex (7) assumptorum respondentem. Jam vero si in aequatione rectae (6) pro m singuli ex (7) assumpti n valores simulque pro μ respondentes singuli ex (8) ponantur, illa recta singulas datae curvae repraesentabit asymptotas, aliam post aliam. Eliminata vero inter aequationes (6) et (8) quantitate μ illa (6) ita transformatur:

$$(y - mx) \frac{d\overset{(n)}{\varphi}}{dy}_{(1,m)} + \overset{(n-1)}{\varphi}_{(1,m)} = 0. \tag{9}$$

Sequitur autem ex (4) et (7):

$$\frac{d\overset{(n)}{\varphi}}{dx}_{(1,m)} + m \frac{d\overset{(n)}{\varphi}}{dy}_{(1,m)} = 0,$$

qua aequatione adhibita illa (9) ita quoque scribi potest:

$$x \frac{d\overset{(n)}{\varphi}}{dx}_{(1,m)} + y \frac{d\overset{(n)}{\varphi}}{dy}_{(1,m)} + \overset{(n-1)}{\varphi}_{(1,m)} = 0.$$

Quae aequatio omnes n asymptotas curvae ordinis n repraesentat, si in ea omnes n valores directionis m ex (7) assumpti, alius post alium, ponantur. Quum autem haec aequatio eadem sit, quae diametri directioni m conjugatae, sequitur, ut asymptotae

spectari possint tamquam diametri eaeque, ut docet aequatio (9), suis ipsarum directionibus conjugatae.

§ 3. Aequationi (8) generaliter unum finitumque quantitatis μ valorem certo directionis m valori respondentem inesse diximus; at vero excipiendus est is casus, ubi uno quolibet eorum n valorum directionis m, qui aequationi (7) satisfaciant, haec quoque aequatio: $\dfrac{d\varphi^{(n)}}{dy}_{(1,m)} = 0$ expleatur, id est: ubi aequatio (7) duas radices contineat inter se aequales, aut, ut aliter exprimam: ubi duae asymptotae datae curvae unam eandemque habeant directionem. Quo in singulari casu has asymptotas (quas vocant parabolicas) in infinitum abire docet aequatio (8). Fieri autem potest, ut una cum aequationibus: $\varphi^{(n)}_{(1,m)} = 0$ et $\dfrac{d\varphi^{(n)}}{dy}_{(1,m)} = 0$ haec quoque tertia aequatio eodem, quo illae, directionis m valore m' expleatur: $\varphi^{(n-1)}_{(1,m)} = 0$; quod quum accidit, certum valorem quantitatis μ valori m' respondentem aequatio (8) non exhibet, sed unaquaeque potius rectarum directioni m' parallelarum tamquam asymptota spectanda est. Sed omittamus hos casus singulares asymptotarum parabolicarum et inter se parallelarum et revertamur ad casum generalem, ubi omnes n radices aequationis (7) sint inter se diversae; ac quidem nonnullae aut (si data curva paris ordinis est) etiam omnes imaginariae esse possunt; nunc autem supponamus omnes esse reales, quo in casu quantitatis quoque μ valores omnes reales esse apparet.

Data igitur sit curva algebraica ordinis n cum n rectilineis realibusque asymptotis ejusque quaeratur diameter datae cuilibet directioni m conjugata. Aequationem datae curvae ita transformatam esse cogitemus, ut n asymptotae in ea in evidentiam veniant. Quodsi aequatione:

$$y + a_k\, x + \alpha_k \equiv A_k = 0$$

repraesententur omnes n asymptotae, quarum singularum aequationes per ordinem hac ex generali prodeant, si indici k valores omnium numerorum integrorum a 1 usque ad n supponantur, curvae aequatio ita scribi poterit:

$$A_1 . A_2 . A_3 \ldots\ldots A_n + \varphi^{(n-2)}_{(x,y)} + \ldots\ldots + \varphi^{(o)} = 0$$

vel posito:

$$(y + a_1\, x)\,(y + a_2\, x)\,(y + a_3\, x) \ldots\ldots (y + a_n\, x) \equiv P,$$

quod productum est homogenea illa functio $\varphi^{(n)}$ gradus n, ita:

$$P + P \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\alpha_k}{y + a_k\, x} + \psi^{(n-2)}_{(x,y)} + \ldots\ldots + \psi^{(o)} = 0.$$

Jam vero habemus:

$$\frac{d\varphi^{(n)}}{dx}=\frac{dP}{dx}\equiv P\sum\frac{a}{y+ax},\ \frac{d\varphi^{(n)}}{dy}=\frac{dP}{dy}\equiv P\sum\frac{1}{y+ax},\ \varphi^{(n-1)}=P\sum\frac{\alpha}{y+ax}.$$

Quibus in terminis si ponatur: $x=1$, $y=m$, aequatio diametri directioni m conjugatae antea per P divisa haec fit:

$$\sum\frac{A}{m+a}=0.$$

Unde facili ratione deduci poterit hoc theorema: Si acciderit, ut datae curvae asymptotae omnes in uno eodemque puncto mutuo se intersecent, diametri quoque omnes hoc per punctum transeunt.

§ 4. Data sit curva ordinis n cum n rectilineis realibusque asymptotis rectaque quaelibet L in curvae plano posita; coordinatae punctorum intersectionis hujus rectae cum data curva sint: (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), ... (ξ_n, η_n), et cum asymptotis: (ξ'_1, η'_1), (ξ'_2, η'_2), ... (ξ'_n, η'_n); sequitur deinde ex iis, quae supra in § 2 diximus:

$$\Sigma\,\xi=\Sigma\,\xi',\ \Sigma\,\eta=\Sigma\,\eta'.$$

Porro punctum quodlibet (x, y) sumatur in recta L positum ejusque distantiae ab asymptotis aestimatae secundum rectam L significentur: $r_1, r_2, \ldots r_n$. Sequitur deinde:

$$r^2=(x-\xi')^2+(y-\eta')^2 \text{ et: } \Sigma\,r^2=\Sigma\,(x-\xi')^2+\Sigma\,(y-\eta')^2.$$

Jam si quaeratur id punctum, cujus haec summa quadratarum distantiarum minima sit, scilicet minor, quam alterius cujuslibet puncti eadem in recta L positi, ejus coordinatas hae exhibebunt aequationes:

$$\Sigma\,(x-\xi')=0,\ \Sigma\,(y-\eta')=0 \qquad (10)$$

$$\text{vel: } x=\frac{1}{n}\sum\xi'=\frac{1}{n}\sum\xi,\ y=\frac{1}{n}\sum\eta'=\frac{1}{n}\sum\eta.$$

Quae punctum quaesitum idem esse docent, quod medium arithmeticum inter ea n puncta, in quibus recta L datam curvam ejusve asymptotas intersecet; unde sequitur: Si diameter directioni m conjugata recta quavis L directioni m parallela intersecatur, puncti intersectionis Σr^2 (i. e. summa quadratorum segmentorum rectae L comprehensorum inter diametrum et inter n asymptotas) minor est, quam alterius cujuslibet puncti eadem in recta L positi.

Sit v is angulus, quem recta intersecans cum abscissarum axe includat, ita ut coordinatis utentes rectangulis habeamus: $\operatorname{tg} v=m$ et: $r=(x-\xi')\cos v+(y-\eta')\sin v$,

$$\Sigma\,r=\cos v\ \Sigma\,(x-\xi')+\sin v\ \Sigma\,(y-\eta'),$$

qua in aequatione summam $\Sigma\,r$ intelligi volo algebraicam, ita ut distantiis secundum contrarias directiones aestimatis signa quoque tribuenda sint contraria. Quae quum ita sint, sequitur ex aequationibus (10):

$\Sigma r = 0$; id est, ut verbis exprimam:

Summa algebraica segmentorum cujusque rectae directioni cuilibet m parallelae comprehensorum inter diametrum illi directioni m conjugatam et inter asymptotas est $= 0$.

§. 5. Quaeramus nunc angulum u, quem diameter directioni m conjugata cum abscissarum axe includat. Quae quum diameter repraesentetur hac aequatione:

$$\sum \frac{A}{m+a} \equiv y \sum \frac{1}{m+a} + x \sum \frac{a}{m+a} + \sum \frac{\alpha}{m+a} = 0,$$

habemus coordinatis utentes rectangulis:

$$\operatorname{tg} u = -\frac{\Sigma \frac{a}{m+a}}{\Sigma \frac{1}{m+a}}$$

vel posito: $m = \operatorname{tg} v$, $a = -\operatorname{tg} w$, ubi w is angulus est, quem asymptota A cum abscissarum axe includat:

$$\operatorname{tg} u = \frac{\Sigma \frac{\operatorname{tg} w}{\operatorname{tg} v - \operatorname{tg} w}}{\Sigma \frac{1}{\operatorname{tg} v - \operatorname{tg} w}},$$

unde sequitur:

$$\sum \frac{\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} w}{\operatorname{tg} v - \operatorname{tg} w} = 0 \text{ vel: } \sum \frac{\sin(u-w)}{\sin(v-w)} = 0,$$

qua in aequatione $v - w$ et $u - w$ ii anguli sunt, quos respective recta intersecans ejusque directioni conjugata diameter includant cum asymptota A.

Sit porro Θ angulus comprehensus inter rectae intersecantis directionem eique conjugatam diametrum, scilicet $\Theta = u - v$; sequitur deinde:

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\operatorname{tg} u - m}{1 + m \operatorname{tg} u} = -\frac{m \Sigma \frac{1}{m+a} + \Sigma \frac{a}{m+a}}{\Sigma \frac{1}{m+a} - m \Sigma \frac{a}{m+a}}.$$

Est autem: $m \sum \frac{1}{m+a} + \sum \frac{a}{m+a} \equiv \sum \frac{m+a}{m+a} \equiv n$; unde efficitur:

$$n \operatorname{cotg} \Theta + \sum \frac{1 - am}{m+a} = 0,$$

quae aequatio posito: $m = \operatorname{tg} v$, $a = -\operatorname{tg} w$ transit in hanc:

$$n \operatorname{cotg} \Theta + \Sigma \operatorname{cotg}(v - w) = 0;$$

quae angulum Θ exhibet datis angulis comprehensis inter rectam intersecantem et inter asymptotas.

Posito: $\Theta = \frac{1}{2}\pi$ prodit aequatio:

$$\sum \frac{1 - am}{m+a} = 0, \qquad (11)$$

quae, quum respectu m sit gradus n, n valores quantitatis m exhibet eas directiones indicantes, quarum unaquaeque ad diametrum ipsi conjugatam perpendicularis sit. Omnes igitur curvae algebraicae ordinis cujuslibet n gaudent n directionibus ad diametros ipsis conjugatas perpendicularibus; qua ratione curvas superiorum ordinum ad similitudinem quandam sectionum conicarum accedere apparet, quod attinet ad directiones axium principalium.

Omnes illae n directiones semper reales sunt, si omnes n asymptotae reales; quod ut demonstremus, utamur aequatione:

$$\Sigma \operatorname{cotg}(v - w) = 0, \qquad (12)$$

quae exhibet angulos v, quos illae n directiones cum axe abscissarum includant, datis angulis w, quos asymptotae. Demonstrandum deinde omnes n valores anguli v esse reales. Ad id angulos w ita per ordinem a 0 usque ad π dispositos esse cogitemus, ut a minimo w_1 ascendentes per w_2, w_3, etc. ad maximum w_n perveniamus, ita ut:

$$0 < w_1 < w_2 < w_3 \ldots\ldots < w_n < \pi.$$

Deinde in aequatione (12), quae ita quoque scribi potest:

$$\operatorname{cotg}(v - w_1) + \operatorname{cotg}(v - w_2) + \operatorname{cotg}(v - w_3) + \ldots\ldots + \operatorname{cotg}(v - w_n) \equiv F = 0$$

ponamus pro v hos valores, alium post alium: 0; $w_1 - h$, $w_1 + h$; $w_2 - h$, $w_2 + h$; $w_3 - h$, $w_3 + h$; ...... $w_n - h$, $w_n + h$; π; ubi h quaelibet constans infinite parva, et quaeramus signa, quae illa functio F singulis his anguli v valoribus substitutis assumat. Jam vero

posito: $v = 0$ efficitur: $F = -\Sigma \operatorname{cotg} w$;
" $v = w_1 - h$ " $F = -\infty$,
" $v = w_1 + h$ " $F = +\infty$;
" $v = w_2 - h$ " $F = -\infty$,
" $v = w_2 + h$ " $F = +\infty$;
" .... " ......,
" .... " ......;
" $v = w_n - h$ " $F = -\infty$,
" $v = w_n + h$ " $F = +\infty$;
" $v = \pi$ " $F = -\Sigma \operatorname{cotg} w$.

Signum igitur functionis F mutari apparet omnino $2n^{ies}$, sive summa $\Sigma \operatorname{cotg} w$ valorem habeat positivum, sive negativum. Quarum mutationum n fiunt per infinitum, reliquae n per zero; et quidem illae inter terminos infinite propinquos, scilicet inter valores: $v = w_k - h$ et $v = w_k + h$, hae autem inter terminos quosdam finitis intervallis disjunctos neque arctius circumscribendos eosque diversos, prout $\Sigma \operatorname{cotg} w$ valorem habet positivum vel negativum: si enim positivum, n valores anguli v functionem F ad zero reducentes his circumcluduntur terminis:

$$w_1 < v_1 < w_2, \; w_2 < v_2 < w_3, \; w_3 < v_3 < w_4, \ldots\ldots w_n < v_n < \pi,$$

sin negativum, his:

$$0 < v_1 < w_1, \; w_1 < v_2 < w_2, \; w_2 < v_3 < w_3, \ldots\ldots w_{n-1} < v_n < w_n.$$

Demonstratum igitur aequationi (12) n valores anguli v inesse reales, nec plures inesse docet aequatio (11): haec enim directionis m exhibet tantummodo n valores, quorum cuique secundum aequationem: $\operatorname{tg} v = m$ unus duntaxat respondet anguli v, si quidem valore π majores excludantur, quippe qui nihil adjiciant nisi meram repetitionem.

Ceterum, ut facile intellectu, non modo aequatio: $F = 0$, sed etiam: $F = c$, ubi c quaelibet constans, n valores anguli v exhibet reales; unde sequitur, ut non modo valori $\frac{1}{2}\pi$, sed generaliter unicuique reali valori anguli Θ n reales respondeant anguli v.

§ 6. Jam id propositum sit, ut diametri aequatio ad dignitates quantitatis m disponatur. Quodsi data curva ordinis n repraesentetur aequatione: $f = 0$, aequationem diametri postulata ratione dispositam in hanc formam redigendam esse dico:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{m^k}{k!\,(n-k-1)!} \cdot \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-k-1}\, dy^k} = 0,$$

quae aequatio, si multiplicetur cum $(n-1)!$ et summa indicata signo explicetur, ita quoque scribi potest:

$$\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} + \frac{(n-1)}{1} m \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-2}\, dy} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\quad 2} m^2 \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-3}\, dy^2} + \ldots + m^{n-1} \frac{d^{n-1} f}{dy^{n-1}} = 0$$

vel, ut significatione utar quasi symbolica, ita:

$$d^{n-1} f \left(\frac{1}{dx} + \frac{m}{dy}\right)^{n-1} = 0.$$

Quod ut ratione quam brevissima demonstremus, ineamus viam, quam vocant inductionis perfectae. Supponentes enim jam demonstratum esse illud theorema de curvis ordinis $n-1$ docebimus valere etiam de curvis ordinis n. Quo facto reliquum erit, ut de curvis secundi ordinis in specie demonstretur, sed vix necesse: evidenter enim ex hac earum aequatione generali: $f \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ apparet esse:

$$x \frac{d\varphi^{(2)}}{dx_{(1,m)}} + y \frac{d\varphi^{(2)}}{dy_{(1,m)}} + \varphi^{(1)}_{(1,m)} \equiv \frac{df}{dx} + m \frac{df}{dy}.$$

Jam curvae ordinis cujuslibet n datae aequatione: $f \equiv \varphi^{(n)} + \varphi^{(n-1)} + \ldots = 0$ diameter directioni m conjugata hac repraesentatur aequatione:

$$x \frac{d\varphi^{(n)}}{dx_{(1,m)}} + y \frac{d\varphi^{(n)}}{dy_{(1,m)}} + \varphi^{(n-1)}_{(1,m)} = 0,$$

cujus partem sinistram brevitatis caussa significemus: D_n. Demonstrandum deinde:

$$D_n \equiv \frac{1}{(n-1)!} \cdot d^{n-1} f\left(\frac{1}{dx} + \frac{m}{dy}\right)^{n-1}.$$

Quod quum theorema supponamus valere de curvis ordinis $n-1$, valet de utraque curvarum, quarum aequationes sint: $\frac{df}{dx} = 0$ et $\frac{df}{dy} = 0$ vel: $\frac{d\varphi^{(n)}}{dx} + \frac{d\varphi^{(n-1)}}{dx} + \ldots = 0$ et $\frac{d\varphi^{(n)}}{dy} + \frac{d\varphi^{(n-1)}}{dy} + \ldots = 0$; quarum diametri directioni m conjugatae repraesentantur his aequationibus:

$$\left.\begin{aligned} D_{n-1} &\equiv x \frac{d^2\varphi^{(n)}}{dx^2}_{(1,m)} + y \frac{d^2\varphi^{(n)}}{dx\,dy}_{(1,m)} + \frac{d\varphi^{(n-1)}}{dx}_{(1,m)} = 0, \\ D'_{n-1} &\equiv x \frac{d^2\varphi^{(n)}}{dx\,dy}_{(1,m)} + y \frac{d^2\varphi^{(n)}}{dy^2}_{(1,m)} + \frac{d\varphi^{(n-1)}}{dy}_{(1,m)} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Habemus igitur secundum illud theorema, quippe quod de curvis ordinis $n-1$ jam demonstratum supponatur:

$$D_{n-1} \equiv \frac{1}{(n-2)!} \cdot d^{n-2} \frac{df}{dx}\left(\frac{1}{dx} + \frac{m}{dy}\right)^{n-2},$$

$$D'_{n-1} \equiv \frac{1}{(n-2)!} \cdot d^{n-2} \frac{df}{dy}\left(\frac{1}{dx} + \frac{m}{dy}\right)^{n-2};$$

vel:

$$\left.\begin{aligned} D_{n-1} &\equiv \frac{1}{(n-2)!} \cdot d^{n-1} f \frac{1}{dx}\left(\frac{1}{dx} + \frac{m}{dy}\right)^{n-2}, \\ D'_{n-1} &\equiv \frac{1}{(n-2)!} \cdot d^{n-1} f \frac{1}{dy}\left(\frac{1}{dx} + \frac{m}{dy}\right)^{n-2}. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Porro conjunctis inter se aequationibus (13) efficitur:

$$D_{n-1} + m D'_{n-1} \equiv x \left(\frac{d^2\varphi^{(n)}}{dx^2}_{(1,m)} + m \frac{d^2\varphi^{(n)}}{dx\,dy}_{(1,m)} \right) + y \left(\frac{d^2\varphi^{(n)}}{dx\,dy}_{(1,m)} + m \frac{d^2\varphi^{(n)}}{dy^2}_{(1,m)} \right) +$$

$$+ \frac{d\varphi^{(n-1)}}{dx}_{(1,m)} + m \frac{d\varphi^{(n-1)}}{dy}_{(1,m)}.$$

Sequitur autem ex theoremate Euleriano de functionibus homogeneis adhibito functionibus $\frac{d\varphi^{(n)}}{dx}$, $\frac{d\varphi^{(n)}}{dy}$, $\varphi^{(n-1)}$, quae homogeneae sunt gradus $n-1$:

$$x \frac{d^2\varphi^{(n)}}{dx^2} + y \frac{d^2\varphi^{(n)}}{dx\,dy} \equiv (n-1) \frac{d\varphi^{(n)}}{dx}, \quad x \frac{d^2\varphi^{(n)}}{dx\,dy} + y \frac{d^2\varphi^{(n)}}{dy^2} \equiv (n-1) \frac{d\varphi^{(n)}}{dy},$$

$$x \frac{d\varphi^{(n-1)}}{dx} + y \frac{d\varphi^{(n-1)}}{dy} \equiv (n-1)\, \varphi^{(n-1)};$$

quae aequationes, si in iis ponatur: $x = 1$, $y = m$, transeunt in has:

$$\frac{d^2\varphi^{(n)}}{dx^2}_{(1,m)} + m\frac{d^2\varphi^{(n)}}{dx\,dy}_{(1,m)} \equiv (n-1)\frac{d\varphi^{(n)}}{dx}_{(1,m)},\quad \frac{d^2\varphi^{(n)}}{dx\,dy}_{(1,m)} + m\frac{d^2\varphi^{(n)}}{dy^2}_{(1,m)} \equiv (n-1)\frac{d\varphi^{(n)}}{dy}_{(1,m)},$$

$$\frac{d\varphi^{(n-1)}}{dx}_{(1,m)} + m\frac{d\varphi^{(n-1)}}{dy}_{(1,m)} \equiv (n-1)\,\varphi^{(n-1)}_{(1,m)}.$$

Habemus igitur:

$$D_{n-1} + m\,D'_{n-1} \equiv (n-1)\left(x\frac{d\varphi^{(n)}}{dx}_{(1,m)} + y\frac{d\varphi^{(n)}}{dy}_{(1,m)} + \varphi^{(n-1)}_{(1,m)}\right) \text{ vel:}$$

$$D_{n-1} + mD'_{n-1} \equiv (n-1)\,D_n.$$

Hac in aequatione pro D_{n-1} et D'_{n-1} expressiones illae ex (14) ponantur; unde sequitur:

$$(n-1)\;D_n \equiv \frac{1}{(n-2)!}\,d^{n-1}f\left(\frac{1}{dx}+\frac{m}{dy}\right)\left(\frac{1}{dx}+\frac{m}{dy}\right)^{n-2} \text{ vel:}$$

$$D_n \equiv \frac{1}{(n-1)!}\,d^{n-1}f\left(\frac{1}{dx}+\frac{m}{dy}\right)^{n-1}.$$

Quod erat demonstrandum.

§ 7. Leges reciprocitatis binarum diametrorum, ut in sectionibus conicis inveniuntur, de curvis superiorum ordinum valere non possunt. Attamen curvae tertii ordinis uno puncto gaudent, per quod duae diametri poni possint mutuo sibi reciprocae, ita ut altera alterius directioni conjugata sit. Quodsi curva tertii ordinis data sit generali aequatione:

$$f \equiv \varphi^{(3)} + \varphi^{(2)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(0)} = 0,$$

diameter directioni m conjugata hac repraesentatur aequatione:

$$x\,\frac{d\varphi^{(3)}}{dx}_{(1,m)} + y\,\frac{d\varphi^{(3)}}{dy}_{(1,m)} + \varphi^{(2)}_{(1,m)} = 0,$$

quae ad dignitates quantitatis m disposita secundum § 6 ita quoque scribi potest:

$$m^2\frac{d^2f}{dy^2} + 2m\,\frac{d^2f}{dx\,dy} + \frac{d^2f}{dx^2} = 0. \qquad (15)$$

Hac ex aequatione si quantitatem m definiendam statuamus, accipimus duos valores m_1 et m_2, quae functiones sunt coordinatarum x, y et eas directiones indicant, quibus conjugatae diametri T_1 et T_2 per punctum cum coordinatis x, y transeant; hae vero coordinatae ita determinandae sunt, ut duae illae diametri mutuo sibi reciprocae sint. Quae diametri coordinatis accentu praeditis repraesentantur his aequationibus:

$$(x'-x)\,\frac{d\varphi^{(3)}}{dx}_{(1,m_1)} + (y'-y)\,\frac{d\varphi^{(3)}}{dy}_{(1,m_1)} = 0,\; (T_1)$$

$$(x'-x)\frac{d\varphi^{(3)}}{dx}_{(1,m_2)}+(y'-y)\frac{d\varphi^{(3)}}{dy}_{(1,m_2)}=0. \quad (T_2)$$

Ut mutuo sibi reciprocae sint, illa (T_1) directioni m_2, haec (T_2) directioni m_1 parallela esse debet; unde sequitur:

$$m_2\frac{d\varphi^{(3)}}{dy}_{(1,m_1)}+\frac{d\varphi^{(3)}}{dx}_{(1,m_1)}=0, \quad m_1\frac{d\varphi^{(3)}}{dy}_{(1,m_2)}+\frac{d\varphi^{(3)}}{dx}_{(1,m_2)}=0$$

vel, si ponatur: $\varphi^{(3)}\equiv Ax^3+3Bx^2y+3Cxy^2+Dy^3$:

$$m_2\,(B+2Cm_1+Dm_1^2)+A+2Bm_1+Cm_1^2=0,$$
$$m_1\,(B+2Cm_2+Dm_2^2)+A+2Bm_2+Cm_2^2=0;$$

quarum duarum aequationum primum subtractione, deinde additione deduci poterunt hae:

$$B+C\,(m_1+m_2)+Dm_1\,m_2=0, \quad A+B\,(m_1+m_2)+Cm_1\,m_2=0. \quad (16)$$

Quae eos valores m_1 et m_2 exhibent, quibus conjugatae diametri mutuo sibi reciprocae sint. Sequitur autem ex aequationibus (15):

$$(m_1+m_2)\frac{d^2f}{dy^2}=-2\frac{d^2f}{dx\,dy}, \quad m_1\,m_2\frac{d^2f}{dy^2}=\frac{d^2f}{dx^2}; \quad (17)$$

ubi x, y ejus puncti coordinatae sunt, per quod duae illae diametri transeant. Jam eliminatis inter (16) et (17) quantitatibus m_1 et m_2 quaesiti illius puncti coordinatas hae exhibebunt aequationes:

$$B\frac{d^2f}{dy^2}-2C\frac{d^2f}{dx\,dy}+D\frac{d^2f}{dx^2}=0, \quad A\frac{d^2f}{dy^2}-2B\frac{d^2f}{dx\,dy}+C\frac{d^2f}{dx^2}=0;$$

quae, quum inter x et y lineares sint, duas rectas repraesentant in puncto mutuo se intersecantes quaesito. Videbimus infra in § 10, quae hujus puncti interpretatio sit geometrica.

De constructione diametrorum.

§ 8. Data sit curva ordinis $n-1$ cum $n-1$ rectilineis realibusque asymptotis ejusque in plano altera ordinis n, quae easdem, quae illa, habeat $n-1$ asymptotas praeterque has unam quamlibet aliam A_n. Aequationes diametrorum ambarum curvarum uni eidemque directioni conjugatarum hae sunt:

$$\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{A_k}{m+a_k}=0, \quad \sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{A_k}{m+a_k}+\frac{A_n}{m+a_n}=0.$$

Duae hae aequationes demonstrant punctum, in quo binae diametri eidem cuilibet directioni conjugatae mutuo se intersecent, semper positum esse illa in asymptota A_n, quae curvae ordinis n accesserit. Quae quum ita sint, diametrum cujuslibet curvae algebraicae cum rectilineis realibusque asymptotis datae cuilibet directioni conjugatam

geometrica constructione invenire possumus ab hyperbola gradatim ad datam curvam ascendentes.

Data sit exempli causa curva tertii ordinis cum asymptotis A_1, A_2, A_3, et praeterea directio m, cui conjugata diameter construenda sit. Quodsi primum hyperbolam constructam cogitemus, quae asymptotas habeat A_1 et A_2, ejus diametrum directioni m conjugatam, ut notum, accipimus, quum segmentum cujuslibet rectae directioni m parallelae comprehensum inter duas illas asymptotas bifariam secamus et punctum bisecans cum occursu illarum duarum asymptotarum A_1 et A_2 conjungimus; sit p_3 id punctum, in quo haec recta conjungens vel ipsa vel producta asymptotam A_3 intersecet. Deinde eandem rationem duabus rectis A_1 et A_3 adhibemus hyperbolam mente construentes cum asymptotis A_1 et A_3 ejusque diametrum directioni m conjugatam eodem modo, quo supra, investigantes; sit p_2 id punctum, in quo haec diameter asymptotam A_2 intersecet. Postremo si tertia hyperbola cum asymptotis A_2 et A_3 ejusque diameter directioni m conjugata construantur, et si p_1 id punctum sit, in quo haec diameter asymptotam A_1 intersecet, tria illa puncta p_1, p_2, p_3 posita sunt in una recta, quae datae curvae tertii ordinis diameter est directioni m conjugata. Cujus theorematis demonstrationem duae illae aequationes sine mora exhibent.

De curva centrali.

§ 9. In sectionibus conicis, ut notum, omnes diametri unum per punctum, scilicet per centrum transeunt; nec non omnino earum curvarum superiorum ordinum diametros omnes unum per punctum transire vidimus, quarum asymptotae omnes se mutuo in uno eodemque puncto intersecent. Generaliter autem curvarum superiorum ordinum diametri unum per punctum non transeunt sed potius curva quadam involvuntur, quam, quia omnia ea puncta continet, in quibus binae diametri infinite propinquae mutuo se intersecant, vocabo *curvam centralem*. Cujus aequatio prodibit, si inter aequationem diametri:

$$x \frac{d\varphi^{(n)}}{dx_{(1,m)}} + y \frac{d\varphi^{(n)}}{dy_{(1,m)}} + \varphi^{(n-1)}_{(1,m)} = 0 \tag{18}$$

interque hanc illius differentiatione ad m deductam:

$$x \frac{d^2\varphi^{(n)}}{dx\,dy_{(1,m)}} + y \frac{d^2\varphi^{(n)}}{dy^2_{(1,m)}} + \frac{d\varphi^{(n-1)}}{dy_{(1,m)}} = 0 \tag{19}$$

eliminata erit quantitas m.

Utamur significationibus introductis in § 6:

$$x \frac{d\varphi^{(n)}}{dx_{(1,m)}} + y \frac{d\varphi^{(n)}}{dy_{(1,m)}} + \varphi^{(n-1)}_{(1,m)} \equiv D_n,$$

$$x \frac{d^2\varphi^{(n)}}{dx^2}_{(1,m)} + y \frac{d^2\varphi^{(n)}}{dx\,dy}_{(1,m)} + \frac{d\varphi^{(n-1)}}{dx}_{(1,m)} \equiv D_{n-1}, \quad x \frac{d^2\varphi^{(n)}}{dx\,dy}_{(1,m)} + y \frac{d^2\varphi^{(n)}}{dy^2}_{(1,m)} + \frac{d\varphi^{(n-1)}}{dy}_{(1,m)} \equiv D'_{n-1};$$

ita ut curva centralis his repraesentetur aequationibus secum conjungendis:

$$D_n = 0, \quad D'_{n-1} = 0. \tag{20}$$

Inveneramus autem in § 6:

$$(n-1)\,D_n \equiv D_{n-1} + mD'_{n-1},$$

qua ex aequatione sequitur, ut tres rectae: D_n, D_{n-1}, D'_{n-1} pro eodem valore directionis m in uno quodam puncto mutuo se intersecent, quod punctum positum esse in curva centrali docent aequationes (20). Duae igitur aequationes:

$$D_{n-1} = 0, \quad D'_{n-1} = 0$$

eliminata inter eas quantitate m ipsae quoque curvam centralem repraesentabunt. Utraque respectu m est gradus $n-2$, respectu x et y autem linearis: jam eliminata inter eas quantitate m aequatio prodibit inter coordinatas x et y gradus $2n-4$. Ergo curva ordinis cujuslibet n curvam centralem habet ordinis $2n-4$, semper paris.

Facile sequitur, ut omnes curvae, quibus eaedem sint asymptotae, eandem habeant curvam centralem.

Quum asymptotae secundum § 2 et ipsae tamquam diametri spectandae sint, curva centralis asymptotis datae curvae tangitur.

Posito:

$$\frac{d^2\varphi^{(n)}}{dx^2}_{(1,m)} \cdot \frac{d^2\varphi^{(n)}}{dy^2}_{(1,m)} - \left(\frac{d^2\varphi^{(n)}}{dx\,dy}_{(1,m)}\right)^2 = 0$$

haec aequatio eos $2n-4$ valores directionis m exhibet, qui ad ramos curvae centralis in infinitum excurrentes pertinent, hisque directionibus conjugatae diametri sunt curvae centralis asymptotae.

Si acciderit, ut omnes datae curvae asymptotae se mutuo in uno eodemque puncto intersecent, curva centralis in hoc unum punctum reducitur.

Rectae D_{n-1} et D'_{n-1}, quarum punctum intersectionis, quicunque valor est directionis m, semper in curva centrali positum est, spectari possunt, ut vidimus in § 6, tamquam diametri duarum curvarum ordinis $n-1$, quae, si datae curvae aequatio sit: $f = 0$, repraesentantur aequationibus: $\frac{df}{dx} = 0$ et $\frac{df}{dy} = 0$. Locus igitur geometricus eorum punctorum, in quibus binae diametri harum curvarum uni eidemque directioni conjugatae mutuo se intersecant, datae curvae curva centralis est. Duae illae curvae ordinis $n-1$ mutuo se intersecant in $(n-1)^2$ punctis, per quae si tertia quaelibet curva ejusdem ordinis ponatur, cujus aequatio sit: $\frac{df}{dx} + k\frac{df}{dy} = 0$, ubi k quae-

libet constans, hujus curvae diametrum directioni m conjugatam facile apparet transire per punctum intersectionis rectarum D_{n-1} et D'_{n-1}. Nec minus facile generaliter hoc theorema deduci poterit: Omnium curvarum ejusdem cujuslibet ordinis n, quae in iisdem n^2 punctis intersecantur, diametri uni eidemque cuilibet directioni conjugatae unum per punctum transeunt. Sed haec nonnisi obiter.

§ 10. Quum pro omnibus curvae centralis punctis aequatio (18) ejusque ad m differentiatione deducta (19) valeant, illi (18), si in ea quantitas m definienda statuatur, duas radices inesse oportet inter se aequales. Quodsi per unum quodlibet curvae centralis punctum omnes, quae possunt, $n-1$ diametri datae curvae ponantur, duae in unam coincidere debent, quoniam uni eidemque directioni conjugatae sunt. Porro si inter coordinatas x et y talis aequatio inventa erit, ut aequatio (18) duas radices pro m contineat inter se aequales, inventa aequatio curvam centralem repraesentabit.

Data sit exempli causa curva tertii ordinis aequatione:

$$f \equiv \varphi^{(3)} + \varphi^{(2)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(0)} = 0,$$

cujus diameter directioni m conjugata secundum § 6 hac repraesentatur aequatione ad dignitates quantitatis m disposita:

$$m^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + 2m \frac{d^2 f}{dx\,dy} + \frac{d^2 f}{dx^2} = 0;$$

quae ut duas radices contineat inter se aequales, postulatur:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \cdot \frac{d^2 f}{dy^2} - \left(\frac{d^2 f}{dx\,dy}\right)^2 = 0.$$

Haec aequatio sectionem conicam repraesentat, quae datae curvae tertii ordinis curva centralis est. Jam vero centri coordinatas, si ponatur, ut supra in § 7: $\varphi^{(3)} \equiv$ $\equiv Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3$, hae exhibent aequationes:

$$C \frac{d^2 f}{dx^2} + A \frac{d^2 f}{dy^2} - 2B \frac{d^2 f}{dx\,dy} = 0, \quad D \frac{d^2 f}{dx^2} + B \frac{d^2 f}{dy^2} - 2C \frac{d^2 f}{dx\,dy} = 0.$$

Hae autem aequationes eaedem sunt, quae illae in § 7, quibus coordinatae ejus puncti determinabantur, per quod duae diametri poni possint mutuo sibi reciprocae. Illud igitur punctum curvae centralis centrum est; unde sequitur, ut duae illae diametri sint curvae centralis asymptotae. Prout igitur curva centralis erit vel ellipsis vel hyperbola vel parabola, diametri illae reciprocae erunt vel imaginariae vel reales in finito vel reales in infinito; nec non vice versa simili ratione.

Quum ambae diametri reciprocae iis directionibus m_1 et m_2, quibus conjugatae sunt, mutuo sint parallelae, ipsae directiones m_1 et m_2 asymptotarum erunt curvae centralis. Pro quibus directionibus in § 7 has inveneramus aequationes:

$$B + C(m_1 + m_2) + Dm_1\,m_2 = 0, \quad A + B(m_1 + m_2) + Cm_1\,m_2 = 0,$$

unde sequitur: $m_1 + m_2 = -\frac{BC - AD}{C^2 - BD}$, $m_1 m_2 = \frac{B^2 - AC}{C^2 - BD}$.

Duarum igitur curvae centralis asymptotarum directiones hac continentur aequatione quadratica:

$$(C^2 - BD)\, m^2 + (BC - AD)\, m + B^2 - AC = 0.$$

Jam posito: $(BC - AD)^2 - 4\,(B^2 - AC)\,(C^2 - BD) \equiv M$ curvam centralem apparet esse ellipsin vel hyperbolam vel parabolam, prout $M < 0$ vel $M > 0$ vel $M = 0$. Porro duo forsitan memoratu digni sint casus particulares: curva enim centralis transibit in hyperbolam aequilateram, si $B^2 - AC + C^2 - BD = 0$, in circulum autem, si $BC - AD = 0$ et $B^2 - AC - (C^2 - BD) = 0$, vel, quod inde sequitur, si $A + C = 0$ et $B + D = 0$.

§ 11. Discutiamus aequationes curvae centralis, quum accidit, ut omnes datae curvae asymptotae rectilineae realesque sint. Quodsi algorithmo in § 3 introducto utamur, aequatio diametri directioni m conjugatae haec est:

$$\sum \frac{A}{m + a} = 0,$$

ejusque differentiatione ad m efficitur:

$$\sum \frac{A}{(m + a)^2} = 0.$$

Eliminata inter has duas aequationes quantitate m aequatio prodibit curvae centralis.

Jam terminus A distantiam exprimit alicujus puncti curvae centralis ab asymptota A aestimatam secundum directionem axis ordinatarum. Ex posteriore aequatione sequitur, ut hae distantiae ullius puncti curvae centralis a n asymptotis omnes idem signum habere non possint; id est, ut puncta intersectionis ordinatae ullius puncti curvae centralis cum asymptotis datae curvae omnia ad eandem partem illius puncti posita esse non possint. Quum vero directio axis ordinatarum non certa supposita sit sed potius ad libitum sumi possit, sequitur, ut unumquodque tale punctum, per quod recta quaelibet ita poni possit, ut ejus puncta intersectionis cum n asymptotis datae curvae omnia ad eandem partem illius puncti posita sint, curvae centralis esse non possit. Talia autem puncta, ut facile intellectu, omnia ea sunt, quae in spatiis posita sint apertis i. e. asymptotis datae curvae non plane circumclusis: ergo curvam centralem intra spatia coerceri oportet asymptotis plane circumclusa. Quae si asymptotae omnes rectilineae (nullae parabolicae aut inter se parallelae) realesque sunt, curva centralis ramos in infinitum excurrentes habere non potest sed ex una pluribusve partibus componitur plane conclusis.

§ 12. Ex his deductionibus sequitur, ut curva centralis curvarum tertii ordinis cum rectilineis realibusque asymptotis A_1, A_2, A_3 ellipsis sit triangulo asymptotico inscripta.

Apparet enim ex § 9 curvam centralem ordinis esse secundi tangique asymptotis. Quoniam autem talium ellipseon numerus infinitus est, hac proprietate curva centralis nondum satis certe determinatur. Quod ut fiat, quaeramus nunc ea puncta, in quibus asymptotis datae curvae tangatur:

Aequatio diametri tertii ordinis directioni m conjugatae ita scribi potest:

$$(m+a_2)(m+a_3)A_1+(m+a_3)(m+a_1)A_2+(m+a_1)(m+a_2)A_3=0,$$

quae transit in aequationem unius asymptotarum: $A_1=0$, $A_2=0$, $A_3=0$, prout in ea ponitur: $m=-a_1$, $m=-a_2$, $m=-a_3$. Differentiatione illius aequationis ad m deducitur haec:

$$(2m+a_2+a_3)A_1+(2m+a_3+a_1)A_2+(2m+a_1+a_2)A_3=0.$$

Eliminata inter has duas aequationes quantitate m aequatio prodibit curvae centralis, scilicet ellipseos triangulo asymptotico inscriptae. Jam vero si in posteriore aequatione ponatur: $m=-a_3$ et: $A_3=0$, efficitur:

$$(a_2-a_3)A_1+(a_1-a_3)A_2=0 \text{ vel } \frac{A_1}{a_1-a_3}+\frac{A_2}{a_2-a_3}=0,$$

quae aequatio conjuncta cum: $A_3=0$ coordinatas ejus puncti exhibet, in quo asymptota A_3 ellipsin illam tangat; hanc vero aequationem diametrum hyperbolae cum asymptotis A_1 et A_2 directioni tertiae asymptotae A_3 conjugatam repraesentare apparet. Ellipsis igitur asymptota A_3 in puncto intersectionis hujus asymptotae illiusque diametri tangitur. Illa autem diameter, ut notum, trianguli asymptotici latus A_3, cujus directioni conjugata est, bifariam secat. Ergo hoc latus A_3 ellipsin in puncto tangit ipsum bifariam secante. Idem eodem modo de utraque aliarum asymptotarum A_1 et A_2 doceri potest; unde sequitur:

Curva centralis curvarum tertii ordinis cum tribus rectilineis realibusque asymptotis **maxima** est ellipseon triangulo asymptotico inscriptarum.

Vidimus jam supra in § 8, quomodo diametri talis curvae tertii ordinis construi possint. Puncta enim, in quibus hae rectae:

$$\frac{A_1}{m+a_1}+\frac{A_3}{m+a_3}=0,\quad \frac{A_2}{m+a_2}+\frac{A_3}{m+a_3}=0, \tag{21}$$

quarum illa transit per angulum trianguli asymptotici oppositum lateri A_2, haec per angulum lateri A_1, intersecent opposita singula latera A_2 et A_1, recta inter se conjungi oportet; quae recta diameter tertii ordinis est directioni m conjugata. Jam quaeramus locum geometricum puncti intersectionis rectarum (21) pro variis directionis m valoribus. Cujus loci aequatio prodibit eliminata inter aequationes (21) quantitate m. Quo facto efficitur:

$$A_1(a_2-a_3)+A_2(a_3-a_1)+A_3(a_2-a_1)=0. \tag{22}$$

Locus igitur ille geometricus recta est; quae ut penitus cognoscatur, satis est, si duo puncta in ea posita cognoscantur. Ad id quaeramus duo illa puncta, in quibus haec recta asymptotas A_1 et A_2 intersecet, ponentes primum: $A_1 = 0$ ac deinde: $A_2 = 0$. Jam vero posito: $A_1 = 0$ efficitur:

$$A_2 (a_3 - a_1) + A_3 (a_2 - a_1) = 0 \text{ vel } \frac{A_2}{a_2 - a_1} + \frac{A_3}{a_3 - a_1} = 0,$$

quae aequatio diametrum repraesentat hyperbolae cum asymptotis A_2 et A_3 directioni asymptotae A_1 conjugatam; quam diametrum constat transversalem esse trianguli asymptotici ductam ad latus A_1. Posito autem: $A_2 = 0$ efficitur:

$$A_1 (a_2 - a_3) + A_3 (a_2 - a_1) = 0 \text{ vel } \frac{A_1}{a_1 - a_2} + \frac{A_3}{a_3 - a_2} = 0,$$

quae aequatio transversalis est ductae ad latus A_2. Rectam igitur (22) per puncta transire apparet latera A_1 et A_2 trianguli asymptotici bifariam secantia. Quae quum ita sint, diametri tertii ordinis construi possunt hac ratione etiam simpliciore:

Recta ducatur duo quaelibet latera A_1 et A_2 trianguli asymptotici bifariam secans. Deinde per angulos lateribus A_1 et A_2 oppositos quotvis ponantur rectae, quarum binarum punctum intersectionis illa in recta bifariam secante (vel ipsa vel producta) positum sit. Postremo si bina ea puncta, in quibus binae illae rectae oppositas asymptotas A_1 et A_2 intersecant, singulis rectis inter se conjunguntur, hae rectae diametri sunt. Quo modo quotvis diametri tertii ordinis easque curva involvens, scilicet maxima triangulo asymptotico inscripta ellipsis, constructione geometrica inveniuntur.

Curvarum tertii ordinis cum duabus asymptotis imaginariis tertiaque, ut necesse, reali curva centralis hyperbola est, quae et imaginariis illis duabus asymptotis et tertia reali tangitur. Nec non analogia quaedam est inter hunc casum interque illum supra tractatum in eo, quod hujus hyperbolae axium productum maximum est, scilicet majus, quam alterius cujuslibet hyperbolae asymptotis tactae. Cujus theorematis demonstrationem haud ita difficilem, sed longiorem omittere liceat.

Vicem duarum illarum imaginarium asymptotarum quodammodo praestare potest ellipsis cum ipsis illis asymptotis imaginariis, quippe cujus cum data curva puncta intersectionis quatuor in infinitum progrediantur. Nec non fieri potest, ut ellipsis illa transeat in circulum, nimirum si data curva talis est (velut illa, quam vocant cissoidem Dioclis), cujus duae asymptotae imaginariae cum axe abscissarum includant angulos, quorum tangentes trigonometricae sint $= \pm \sqrt{-1}$; quo in casu, ut vir ill. Pluecker docuit, cum quavis quoque altera recta includunt angulos, quorum tangentes trigonometricae et ipsae sint $= \pm \sqrt{-1}$; porro demonstravit idem, si inveniatur punctum, per quod ad datam quamvis sectionem conicam duae

tangentes duci possint cum abscissarum axe includentes angulos, quorum tangentes trigonometricae sint $= \pm \sqrt{-1}$, hoc punctum unum esse sectionis conicae focorum. Unde sequitur, ut eo in casu, de quo loquimur, punctum intersectionis ambarum datae curvae asymptotarum imaginarium, scilicet centrum illius circuli, alter hyperbolae centralis focorum sit realium, quoniam curva centralis datae curvae asymptotis tangitur.

§ 13. Curvarum quarti ordinis curva centralis, ut sequitur ex § 9, et ipsa quarti ordinis est; cujus aequatio ut inveniatur, data curva repraesentetur generali hac aequatione: $f = 0$; unde sequitur secundum § 6, ut diametri quarti ordinis directioni m conjugatae aequatio ad dignitates quantitatis m disposita haec sit:

$$\frac{d^3 f}{dx^3} + 3m \frac{d^3 f}{dx^2\, dy} + 3m^2 \frac{d^3 f}{dx\, dy^2} + m^3 \frac{d^3 f}{dy^3} = 0$$

vel, si ponatur: $\frac{d^3 f}{dx^3} \equiv p,\ \frac{d^3 f}{dx^2\, dy} \equiv q,\ \frac{d^3 f}{dx\, dy^2} \equiv r,\ \frac{d^3 f}{dy^3} \equiv s,$

haec: $$p + 3qm + 3rm^2 + sm^3 = 0.$$

Porro si inter p, q, r, s talis aequatio inventa erit, ut illa duas radices pro m contineat inter se aequales, inventa aequatio curvae centralis erit; unde facili ratione sequitur, ut curva centralis repraesentetur hac aequatione:

$$(ps - qr)^2 - 4\,(q^2 - pr)\,(r^2 - qs) = 0.$$

Data sit, ut exemplo utar, curva, cujus quatuor asymptotae omnes rectilineae realesque sint idque ea ratione, ut tres (A_1, A_2, A_3) unum per punctum, scilicet per initium coordinatarum transeant. Prima (A_1) sumatur axis abscissarum et utraque aliarum cum illa angulum includat dimidio recto aequalem, altera cum directione positiva, altera cum negativa. Quarta denique asymptota (A_4) ad primam perpendicularis sit, ita ut rectangulis coordinatis suppositis axi ordinatarum in distantia quadam α sit parallela. Quae quum ita sint, data curva repraesentabitur hac aequatione:

$$y\,(x^2 - y^2)\,(x - \alpha) + \varphi^{(2)} + \ldots\ldots \equiv f = 0;$$

unde sequitur: $p = 6y,\ q = 6x - 2\alpha,\ r = -6y,\ s = -6x + 6\alpha;$

vel, quum aequatio curvae centralis non commutetur, si omnes quatuor termini p, q, r, s simul uno eodemque numero dividantur:

$$p = y,\ q = x - \tfrac{1}{3}\alpha,\ r = -y,\ s = -x + \alpha.$$

Ut curvae centralis aequatio quam simplicissima fiat, initium coordinatarum secundum axem abscissarum transponatur in id punctum, cujus abscissa sit $= \frac{1}{3}\alpha$; quo facto efficitur: $$p = y,\ q = x,\ r = -y,\ s = \tfrac{2}{3}\alpha - x.$$

Jam vero habemus:

$$ps - qr = \tfrac{2}{3}\alpha y,\ q^2 - pr = x^2 + y^2,\ r^2 - qs = x^2 + y^2 - \tfrac{2}{3}\alpha x.$$

Aequatio igitur curvae centralis haec est:

$\frac{1}{9}\alpha^2 y^2 - (x^2+y^2)(x^2+y^2-\frac{2}{3}\alpha x)=0$ vel: $(x^2+y^2)^2-\frac{2}{3}\alpha x(x^2+y^2)-\frac{1}{9}\alpha^2 y^2=0$.

Curva autem hac aequatione repraesentata illa est, quam propter formam cordi (καρδία) similem vocant cardioidem, quae puncto quolibet describitur posito in circumferentia circuli, qui super circumferentia alterius circuli ipsi aequalis rotatur. Ac quidem utriusque circuli radius est $=\frac{1}{6}\alpha$ et circuli immobilis centrum in axe abscissarum positum ejusque abscissa ad primitivum initium coordinatarum relata est $=\frac{1}{2}\alpha$; porro, ne quid incerti de situ curvae centralis reliquum sit, locum indicari oportet, quem punctum describens aliquo tempore obtinuerit: quod quidem hac ratione fieri potest, ut illud punctum, antequam circulus mobilis rotari coeptus sit, eo in puncto circumferentiae circuli immobilis positum fuisse statuamus, cujus coordinatae ad primitivum initium relatae sint: $y=0$, $x=\frac{1}{3}\alpha$.

§ 14. Generaliter curvae ordinis cujuslibet n curvam centralem esse ordinis $2n-4$ demonstravimus; saepius autem fit, ut in ordinem minorem reducatur, velut eo in casu, ubi data curva unum vel plura systemata asymptotarum habeat inter se parallelarum (cf. § 3); illo enim in casu in diametri aequatione: $\Sigma \frac{A}{m+a}=0$ duo hujus summae summandi uno eodemque denominatore comprehendi possunt, ita ut illa summa tantummodo $n-1$ summandos contineat; quorum omnium denominatoribus multiplicatione remotis aequatio diametri respectu m in gradum $n-2$ reducetur; differentiatione hujus aequationis ad m prodibit aequatio quaedam gradus $n-3$, qua conjuncta cum illa diametri altera quaedam gradus $n-3$ deduci poterit; ita ut curva centralis duabus repraesentetur aequationibus secum conjungendis, quarum utraque respectu m sit gradus $n-3$, respectu x et y autem linearis: jam eliminata inter eas quantitate m prodibit aequatio gradus $2n-6$; duae igitur unitates de curva centralis ordine deminuuntur.

Si acciderit, ut data curva etiam plura habeat systemata asymptotarum inter se parallelarum, curvam centralem in ordinem etiam minorem descendere facile elucet.

Sed haec de asymptotis valent nonnisi inter se parallelis; parabolicae contra per se curvae centralis in minorem ordinem reductionem generaliter non efficiunt: neque enim his illa diametri aequatio: $\Sigma \frac{A}{m+a}=0$ adhiberi potest, quippe quam quantitates ingrediantur infinite magnae.

De centro curvarum algebraicarum.

§ 15. Inveneramus in § 1 pro iis directionibus m, quibus conjugatae diametri per punctum constans (α, β) transeant, hanc aequationem:

$$\alpha \frac{d\varphi^{(n)}}{dx}_{(1,m)} + \beta \frac{d\varphi^{(n)}}{dy}_{(1,m)} + \varphi^{(n-1)}_{(1,m)} = 0.$$

Hae directiones pro situ dati puncti partim aut (si data curva imparis ordinis est) etiam omnes imaginariae esse possunt, quum coordinatae (α, β) hujus puncti reales maneant. Est vero in omnibus planis curvis algebraicis unum certum et reale punctum, per quod duae diametri poni possint talibus directionibus conjugatae, quae cum abscissarum axe (vel, quod inde sequitur, cum altera qualibet recta) angulos includant, quorum tangentes trigonometricae sint $= \pm \sqrt{-1}$. Cujus puncti coordinatas (α, β), si coordinatis utentes rectangulis ponamus: $m = \pm \sqrt{-1} \equiv \pm i$, huic aequationi satisfacere oportet:

$$\alpha \frac{d\varphi^{(n)}}{dx}_{(1, \pm i)} + \beta \frac{d\varphi^{(n)}}{dy}_{(1, \pm i)} + \varphi^{(n-1)}_{(1, \pm i)} = 0.$$

Qua ex aequatione, quum coordinatae (α, β) supponantur reales, reali parte ab imaginaria separata et utraque singula $= 0$ posita duae aequationes prodeunt, quae, quum inter coordinatas α et β lineares sint, generaliter unum finitumque valorem utriusque coordinatae exhibent. In sectionibus conicis punctum ita determinatum centrum est: centri igitur notionem superiore definitione in omnes planas curvas algebraicas amplificare liceat, sicut focorum quoque notionem Cel. Pluecker definitione supra in § 12 commemorata curvis superiorum ordinum adhibuit.

Si omnes datae curvae asymptotae rectilineae realesque sunt, pro rectangulis centri coordinatis (x, y) haec prodibit aequatio:

$$\sum \frac{A}{a \pm i} = 0$$

vel, si et numerator et denominator fractionis infra summae signum positae multiplicentur cum $(a \mp i)$:

$$\sum \frac{(a \mp i)\, A}{1 + a^2} = 0,$$

quae aequatio, quum omnes asymptotae supponantur reales, realibus centri coordinatis aliter expleri non potest, ac si ponatur:

$$\sum \frac{aA}{1 + a^2} = 0, \quad \sum \frac{A}{1 + a^2} = 0$$

vel introductis angulis w comprehensis inter asymptotas et inter axem abscissarum:

$$\sum [(A \cos w) \sin w] = 0, \quad \sum [(A \cos w) \cos w] = 0;$$

quibus aequationibus haec insunt theoremata:

Summa projectionum distantiarum perpendicularium centri ab asymptotis in alterum utrum axem coordinatarum (vel, quod inde sequitur, in quamvis rectam) est $= 0$. Et:

Summa quadratarum perpendicularium distantiarum centri ab asymptotis minima est, scilicet minor, quam alterius cujuslibet puncti in curvae plano positi.

Quaerentibus nobis centrum curvae tertii ordinis datae aequatione: $f \equiv \varphi^{(3)} + \varphi^{(2)} + \ldots = 0$, in diametri aequatione:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + 2m \frac{d^2 f}{dx\, dy} + m^2 \frac{d^2 f}{dy^2} = 0$$

ponendum est: $m = \pm i$, quo facto pro centri coordinatis x et y hae prodeunt aequationes:

$$\frac{d^2 f}{dx\, dy} = 0, \quad \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{d^2 f}{dy^2} = 0,$$

vel posito: $\varphi^{(3)} \equiv Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3$, $\varphi^{(2)} \equiv 3(Ex^2 + 2Fxy + Gy^2)$,
hae: $Bx + Cy + F = 0, \quad (A - C)x + (B - D)y + (E - G) = 0,$
quae aequationes centri coordinatarum valores exhibent semper finitos praeter hunc casum, ubi $B^2 - AC + C^2 - BD = 0,$
unde sequitur adhibitis iis, quae demonstravimus extremo in § 10:

Si acciderit, ut datae curvae tertii ordinis curva centralis hyperbola sit aequilatera, vel, quod inde sequitur, ut diametrorum reciprocarum altera ad alteram perpendicularis sit, centrum abit in infinitum. Nec non vice versa hoc theorema valere apparet.

Curvarum tertii ordinis cum rectilineis realibusque asymptotis centrum intra triangulum asymptoticum positum est et perpendiculares ab asymptotis distantiae longitudinibus correspondentium hujus trianguli laterum directo proportionales sunt.

Si omnes curvae asymptotae, ergo diametri quoque unum per punctum transeant, hoc punctum centrum esse ex duabus illis aequationibus apparet; quo in casu nonnullas species curvarum tertii ordinis centro gaudere jam Eulerus docuit in introd. in anal. inf. Lib. II, § 244.

CAPUT II.

DE CURVIS CONJUGATIS.

§ 16. Posueramus in § 1 per datum quodlibet punctum (ξ, η) rectam repraesentatam aequatione: $y - \eta = m(x - \xi)$ (2)
et coordinatas (x, y) puncti medii arithmetici inter ea n puncta inveneramus, in quibus haec recta curvam aequatione (1) datam intersecat. Inter quas coordinatas hanc deduxeramus aequationem:

$$x \frac{d\varphi^{(n)}}{dx_{(1,m)}} + y \frac{d\varphi^{(n)}}{dy_{(1,m)}} + \varphi^{(n-1)}_{(1,m)} = 0, \qquad (18)$$

quam, si in ea quantitatem m constantem, coordinatas x et y variabiles esse statuamus, datae curvae diametrum directioni m conjugatam repraesentare vidimus. Nunc vero non jam directionem m sed potius coordinatas (ξ, η) constantes esse statuamus, id est:

rectam (2) non jam sibi ipsam parallelam loco moveamus sed potius circum punctum constans torqueamus ac deinde quaeramus locum geometricum, quem hoc in casu punctum illud medium describat. Cujus loci aequatio prodibit, si inter duas aequationes (2) et (18) eliminata erit quantitas m. Quo facto efficitur:

$$x \frac{d\varphi^{(n)}}{dx}_{(x-\xi,\, y-\eta)} + y \frac{d\varphi^{(n)}}{dy}_{(x-\xi,\, y-\eta)} + \varphi^{(n-1)}_{(x-\xi,\, y-\eta)} = 0. \qquad (23)$$

Quae aequatio respectu coordinatarum x et y est gradus n.

Vocabo punctum constans (ξ, η): *punctum radians*, rectam quamque hoc per punctum positam: *radium*, curvam aequatione (23) repraesentatam: *curvam radiatam* sive puncto radianti *conjugatam*, datam autem curvam: *generantem*.

Curva igitur radiata, quicunque puncti radiantis situs est, semper ejusdem ordinis est, cujus curva generans. — Respectu coordinatarum (ξ, η) puncti radiantis aequatio (23) est gradus $n - 1$; homogenea autem est inter $x - \xi$ et $y - \eta$. Quodsi unum quodlibet curvae radiatae punctum fixemus coordinatas x et y constantes, ξ et η autem variabiles esse statuentes, sequitur hoc theorema:

Puncta radiantia omnium curvarum radiatarum ejusdem generantis, quae se mutuo in eodem quolibet puncto p intersecant, posita sunt in systemate $n-1$ rectarum, quae per commune illud punctum p transeunt iisque directionibus parallelae sunt, quibus conjugatae diametri curvae generantis idem per punctum p poni possint.

§ 17. Initio coordinatarum translato in punctum radians aequatio curvae radiatae haec fit:

$$(x + \xi) \frac{d\varphi^{(n)}}{dx} + (y + \eta) \frac{d\varphi^{(n)}}{dy} + \varphi^{(n-1)} = 0$$

vel secundum theorema Eulerianum adhibitum ad functionem homogeneam gradus n:

$$n\varphi^{(n)} + \xi \frac{d\varphi^{(n)}}{dx} + \eta \frac{d\varphi^{(n)}}{dy} + \varphi^{(n-1)} = 0. \qquad (24)$$

Qua ex aequatione sequitur, ut curva radiata generanti similis similiterque posita sit, id est: ut ambae curvae asymptotas habeant et ejusdem generis et mutuo sibi parallelas; porro: ut punctum radians in curva sibi conjugata positum ejusque punctum $(n-1)$ plicatum sit.

Omnium, quae easdem habeant asymptotas, curvarum generantium curvam uni eidemque puncto conjugatam eandem esse apparet. Quum vero ipsum quoque systema n asymptotarum tamquam curva ordinis n spectari possit, inde facile demonstrari potest hoc theorema:

Si curva quaevis algebraica recta qualibet intersecatur, summa algebraica segmentorum hujus rectae comprehensorum inter curvam ejusque asymptotas est $= 0$. Si

enim $C_1, C_2, C_3, \ldots C_n$ puncta intersectionis sint cujuslibet rectae cum curva ordinis n, et $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ cum ejus n asymptotis, sitque p unum quodlibet punctum illa in recta positum, sequitur ex iis, quae diximus, si curva huic puncto p conjugata mente construatur:

$$\sum_{k=1}^{k=n} pC_k = \sum_{k=1}^{k=n} pA_k, \tag{25}$$

qua ex aequatione efficitur:

$$\sum_{k=1}^{k=n} A_k C_k = 0;$$

quod erat demonstrandum.

Aequatio (25) adhibita curvae radiatae, cujus punctum radians $(n-1)$ plicatum esse vidimus, quae igitur quovis radio praeterquam in puncto radiante (p) nonnisi in uno puncto (C) intersecatur, transit in hanc:

$$pC = \sum_{k=1}^{k=n} pA_k;$$

id est, ut verbis exprimam:

Segmentum cujusvis radii comprehensum inter punctum radians et inter curvam ei conjugatam est aequale summae algebraicae segmentorum comprehensorum inter punctum radians et inter curvae ei conjugatae asymptotas.

Secundum hoc theorema facile quotvis puncta curvae dato cuilibet puncto conjugatae construi possunt, si asymptotae hujus curvae omnes rectilineae realesque datae sint. Quas asymptotas, si curvae generantis omnes rectilineae realesque sint, facili constructione geometrica inveniri posse docebimus in § 21.

§ 18. Quaeramus nunc directiones $n-1$ ramorum curvae radiatae, qui in puncto radiante mutuo se intersecant. Ad id curva radiata intersecetur quovis radio, cujus aequatio relata ad initium coordinatarum in puncto radiante positum haec sit: $y = mx$. Abscissas n punctorum intersectionis exhibet haec aequatio:

$$n\overset{(n)}{\varphi}_{(x,mx)} + \xi \frac{d\overset{(n)}{\varphi}}{dx}_{(x,mx)} + \eta \frac{d\overset{(n)}{\varphi}}{dy}_{(x,mx)} + \overset{(n-1)}{\varphi}_{(x,mx)} = 0,$$

quae radicem $x = 0$ continet $(n-1)$ plicatam. Radix $n\frac{ma}{}$ prodit ex hac:

$$nx\overset{(n)}{\varphi}_{(1,m)} + \xi \frac{d\overset{(n)}{\varphi}}{dx}_{(1,m)} + \eta \frac{d\overset{(n)}{\varphi}}{dy}_{(1,m)} + \overset{(n-1)}{\varphi}_{(1,m)} = 0. \tag{26}$$

Directione vero m radii ita determinata, ut sit:

$$\xi \frac{d\overset{(n)}{\varphi}}{dx}_{(1,m)} + \eta \frac{d\overset{(n)}{\varphi}}{dy}_{(1,m)} + \overset{(n-1)}{\varphi}_{(1,m)} = 0, \tag{27}$$

supremus quoque valor abscissae x fit $= 0$; radium igitur ita determinatum unum $n-1$ ramorum curvae radiatae in puncto radiante tangere apparet. Accipimus autem ex aequatione (27) $n-1$ eos valores directionis m, quibus conjugatae diametri curvae generantis per punctum radians transeant; his igitur valoribus directiones $n-1$ ramorum curvae radiatae indicantur. Alii valores reales, alii imaginarii esse possunt, unde numerus realium ramorum curvae radiatae in puncto radiante vere mutuo se intersecantium determinatur. Si curva generans paris ordinis est, aequatio (27), quicunque puncti radiantis situs est, semper unum certe realem valorem exhibet directionis m; unde sequitur, ut a curvis radiatis paris ordinis punctum radians plane isolatum esse non possit.

§ 19. Casus maxime memoratu dignus is est, ubi duo curvae radiatae rami in puncto radiante mutuo se tangant. Quod ut fiat, coordinatae puncti radiantis ita definiendae sunt, ut aequatio (27) duas radices pro m contineat inter se aequales; unde sequitur adhibitis iis, quae supra diximus in § 10:

Curva centralis curvae generantis locus geometricus est eorum punctorum radiantium, in quibus bini curvarum iis conjugatarum rami mutuo se tangant.

Apud curvas tertii ordinis punctum radians curvae sibi conjugatae duplex est et in punctum reversionis transit, si ambo curvae radiatae rami hoc per punctum transeuntes mutuo se tangant. Maxima igitur ellipsis triangulo asymptotico inscripta locus geometricus est punctorum reversionis curvarum radiatarum. Omnia puncta intra hanc ellipsin posita isolata, omnia extra eam realia veraque duplicia sunt curvarum sibi conjugatarum.

§ 20. Si radii directio m ita fiat, ut sit:

$$\varphi^{(n)}_{(1,m)} = 0, \tag{28}$$

id punctum, in quo radius curvam radiatam praeterquam in puncto radiante intersecet, in infinitum excurrere docet aequatio (26). Sin autem coordinatae quoque puncti radiantis ita definiantur, quibus aequatio (27) expleatur, certi valores coordinatarum puncti intersectionis ex aequatione (26) non prodeunt. Hoc in casu omnia potius puncta illo in radio posita tamquam puncta intersectionis radii cum curva radiata spectanda sunt. Reduci igitur hanc curvam apparet ad systema rectae et curvae cujusdam ordinis $n-1$. Sequitur autem ex aequationibus (27) et (28) secundum ea, quae demonstravimus in § 2, ut hoc in casu punctum radians positum sit in una curvae generantis asymptotarum. Unaquaeque igitur curva puncto conjugata in una curvae generantis asymptotarum posito reducitur ad systema curvae ordinis $n-1$ ejusque asymptotae, in qua punctum radians positum est. Curva puncto intersectionis duarum

asymptotarum conjugata transit in systema curvae ordinis $n-2$ illarumque duarum asymptotarum. Et generaliter: Si m asymptotae curvae generantis ordinis n se mutuo in uno eodemque puncto intersecent, curva huic puncto conjugata reducitur ad systema curvae cujusdam ordinis $n-m$ et illarum m asymptotarum. Quodsi omnes curvae generantis asymptotae unum per punctum, scilicet per centrum transeant, curva huic puncto conjugata ipsis n asymptotis repraesentatur. In hoc igitur casu centrum medium est arithmeticum inter ea n puncta, in quibus recta quaelibet ipsum per centrum posita curvam intersecat.

De diametris et asymptotis curvae radiatae.

§ 21. Ea curvae radiatae aequatione (24) supposita, quae pertinet ad initium coordinatarum in puncto radiante positum, diameter hujus curvae directioni m conjugata repraesentabitur hac aequatione:

$$(nx+\xi)\frac{d\varphi^{(n)}}{dx_{(1,m)}}+(ny+\eta)\frac{d\varphi^{(n)}}{dy_{(1,m)}}+\varphi^{(n-1)}_{(1,m)}=0,$$

in qua, ut ad primitivum initium coordinatarum referatur, ponendum est $x-\xi$ pro x et $y-\eta$ pro y. Quo facto transit in hanc:

$$(nx-[n-1]\,\xi)\frac{d\varphi^{(n)}}{dx_{(1,m)}}+(ny-[n-1]\,\eta)\frac{d\varphi^{(n)}}{dy_{(1,m)}}+\varphi^{(n-1)}_{(1,m)}=0. \quad (29)$$

Curvae autem generantis diameter eidem directioni m conjugata coordinatis accentu praeditis hac repraesentatur aequatione:

$$x'\frac{d\varphi^{(n)}}{dx_{(1,m)}}+y'\frac{d\varphi^{(n)}}{dy_{(1,m)}}+\varphi^{(n-1)}_{(1,m)}=0; \quad (30)$$

unde sequitur, ut diametri ambarum curvarum uni eidemque cuilibet directioni conjugatae inter se parallelae sint.

Porro si puncti radiantis ab illa curvae radiatae diametro quaeratur distantia D aestimata secundum directionem axis ordinatarum, ejus expressionem, ut notum, exhibebit pars sinistra aequationis (29) multiplicatam cum coefficiente ordinatae y, si in ea ponatur: $x=\xi$ et $y=\eta$; quo facto efficitur:

$$nD\frac{d\varphi^{(n)}}{dy_{(1,m)}}=\xi\frac{d\varphi^{(n)}}{dx_{(1,m)}}+\eta\frac{d\varphi^{(n)}}{dy_{(1,m)}}+\varphi^{(n-1)}_{(1,m)}.$$

Simili ratione puncti radiantis a correspondente (i. e. eidem illi directioni m conjugata) curvae generantis diametro distantia D' eodem modo aestimata prodibit ex aequatione (30) posito: $x'=\xi$ et $y'=\eta$, scilicet:

$$D' \frac{d\varphi^{(n)}}{dy}_{(1,m)} = \xi \frac{d\varphi^{(n)}}{dx}_{(1,m)} + \eta \frac{d\varphi^{(n)}}{dy}_{(1,m)} + \varphi^{(n-1)}_{(1,m)} .$$

Habemus igitur:
$$D = \frac{1}{n} D';$$
id est, ut verbis exprimam:

Puncti radiantis distantia ab una qualibet diametrorum curvae radiatae $n^{\underline{ma}}$ portio est a correspondente generantis; atque binae correspondentes diametri ad easdem partes puncti radiantis positae sunt. Quo ex theoremate simplicissima contemplatione geometrica, quum correspondentes diametri inter se parallelae sint, hoc quoque alterum deduci poterit:

Punctum intersectionis duarum curvae radiatae diametrorum semper ea in recta positum est, quae correspondentium duarum generantis cum puncto radiante coniungat (idque in ipsa neque in producta); et puncti radiantis distantia ab illo puncto intersectionis $n^{\underline{ma}}$ portio est ab hoc.

Quum asymptotae quoque tamquam diametri spectandae sint, omnia haec de curvae radiatae diametris dicta adhiberi possunt asymptotis. Quodsi omnes curvae generantis, ergo radiatae quoque asymptotae rectilineae realesque sint, inde facile deduci poterit hoc theorema:

Longitudines laterum polygoni asymptotici curvae radiatae $n^{\underline{mae}}$ portiones sunt correspondentium generantis, quicunque puncti radiantis situs est. Illae igitur longitudines constantes sunt, si quidem curvae generantis asymptotas immutabiles esse supponamus; quum vero eadem sub conditione directiones quoque singularum asymptotarum curvae radiatae constantes sint, sequitur, ut mutuus situs asymptotarum curvae variis punctis, aliis post alia, conjugatae non commutetur sed tantummodo totum asymptotarum systema loco moveatur idque ea ratione, ut singulae asymptotae sibi ipsae semper maneant parallelae.

De curva radiatae centrali.

§ 22. Ex hoc theoremate sequitur adhibitis iis, quae supra diximus in § 9, ut curva quoque radiatae centralis constans et generantis centrali similis similiterque posita sit, quicunque puncti radiantis situs est. Quodsi unius cujuslibet radiatae curvam centralem loco movebimus non torquentes, omnium accipiemus aliam post aliam.

Punctum intersectionis duarum quarumlibet curvae generantis diametrorum infinite propinquarum in curva generantis centrali, correspondentium duarum in radiatae centrali positum est; talia ambarum curvarum centralium puncta vocentur correspondentia, iisque illud theorema de puncto intersectionis duarum diametrorum in § 21 deductum

adhibeatur: Quodsi puncti cujuslibet in curva generantis centrali positi coordinatae sint x, y, correspondentis autem in radiatae significentur x', y', illo ex theoremate sequitur:

$$x' - \xi = \frac{1}{n}(x - \xi),\ y' - \eta = \frac{1}{n}(y - \eta);\ \text{vel:}$$

$$x = n\left(x' - \left(\frac{n-1}{n}\right)\xi\right),\ y = n\left(y' - \left(\frac{n-1}{n}\right)\eta\right).$$

Cognita igitur aequatione curvae generantis centralis positoque in ea nx loco x et ny loco y statim prodibit aequatio curvae radiatae centralis relata ad alterum quoddam initium coordinatarum, cujus coordinatae ad primitivum initium pertinentes sint:

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)\xi \text{ et } \left(\frac{n-1}{n}\right)\eta.$$

Differentiatione illarum aequationum prodeunt hae:

$$dx' = \frac{1}{n}dx,\ dy' = \frac{1}{n}dy;$$

quibus haec insunt theoremata:

Tangentes ambarum curvarum centralium in punctis correspondentibus constructae inter se parallelae sunt. Quodsi acciderit, ut punctum radians in curva generantis centrali positum sit, ambas curvas centrales hoc in puncto mutuo se tangere apparet, quum hoc in casu, ut facile elucet, radiatae quoque centralis per punctum radians transeat ambaeque curvae hoc in puncto tangentem habeant communem. — Longitudo arcus comprehensi inter duo quaelibet puncta curvae radiatae centralis $n^{\underline{ma}}$ portio est comprehensi inter correspondentia duo curvae generantis centralis. Si omnes curvae generantis asymptotae rectilineae realesque sunt, sequitur ex iis, quae supra demonstravimus in § 11, ut et generantis et radiatae curva centralis plane sit conclusa; quo in casu hujus curvae perimetrum apparet $n^{\underline{mam}}$ portionem esse illius. Nec minus facile sit demonstratu, hujus aream esse ad illius ut 1 ad n^2.

De centro curvae radiatae.

§ 23. Theorema illud in § 21 de puncto intersectionis duarum diametrorum amplificatum in diametros directionibus conjugatas imaginariis adhiberi potest centro, quippe quod punctum intersectionis sit duarum diametrorum directionibus $+i$ et $-i$ conjugatarum; unde sequitur:

Centra curvae generantis et radiatae cum puncto radiante in una recta idque ad eandem partem hujus puncti posita sunt. Distantia puncti radiantis a centro curvae radiatae $n^{\underline{ma}}$ portio est a generantis. In sectionibus igitur conicis centrum curvae radiatae punctum est distantiam puncti radiantis a curvae generantis centro bifariam secans.

Conatus sum in hujus opusculi capite primo nonnulla quaedam sectionum conicarum propria jam pridem cognita in omnes planas curvas algebraicas transferre, ut, quae his in genere illisque in specie tribuenda sint, discernantur; ea autem, quae tractavi in capite secundo, ne de illis quidem nescio, an adhuc usque demonstrata sint. Attamen vim habent majorem, quoniam latius patent: curvas enim punctis conjugatas infinite longinquis in diametros transire apparet.

VITA.

Natus sum Hermannus Waldaestel Neobrandenburgi, urbe Megalopolitana, a. d. VI. Cal. Sept. anni hujus saeculi XXXVIII patre Francisco, Primislaviensi, matre Maria de gente Fueldner, quos adhuc vivos veneror. Addictus sum ecclesiae evangelicae.

Primis litterarum elementis imbutus gymnasium patriae urbis per novem annos frequentavi. Anno 1856 testimonium maturitatis adeptus ab illustrissimo Trendelenburg rectore magnifico inter cives universitatis litterariae Berolinensis receptus et a decano spectabili Ill. Kummer philosophorum ordini adscriptus sum.

Docuerunt me per sex semestria: Logicen Ill. Trendelenburg; mathesin Ill. Ohm, Ill. Kummer, Ill. Pluecker, Ill. Beer, Exp. Borchardt, Exp. Schoenfeld; astronomiam theoricam Ill. Encke; physicen Ill. Dove, Ill. Pluecker, Cel. Poggendorff; chemiam Ill. H. Rose; mineralogiam Ill. Noeggerath; zoologiam Ill. Troschel; geographiam plantarum Ill. Caspary.

Praeterea scholis seminarii physici regii Bonnensis interfui per tria semestria, ducibus Ill. Ill. Bischof, Treviranus, Noeggerath, Pluecker, Troschel; ac per aestivum semestre superioris anni obtigit mihi, ut in regendis excursionibus botanicis Viro Ill. Treviranus adessem.

Quibus viris omnibus optime de me meritis gratias me agere quam maximas semperque acturum profiteor.

THESES.

1. Cognitionem quasi asymptotam esse veritatis.
2. Originem et cognitionem rerum mathematicarum esse aprioricam neque empiricam.
3. Symmetriam et continuitatem in formulis analyticis permultum valere ad res mathematicas facilius perscrutandas.
4. Hypothesin materiae caloricae nondum plane esse rejiciendam.
5. Artem musicam ex legibus acusticis non esse deducendam.